**Светлов Н.М.**
*Москва, РГАУ*

# БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СТОИМОСТНЫХ ПРОПОРЦИЙ

Цель статьи — уточнить технологическую интерпретацию стоимостных пропорций и объяснить отклонения коэффициентов полных затрат от цен, воспользовавшись свойствами бесконечно малых определителей.

Бесконечно малым определителем назовём $\det(\mathbf{M}) \neq 0$, если $\det(\mathbf{M}+\boldsymbol{\Theta}) = 0$, а все компоненты $\boldsymbol{\Theta}$ бесконечно малые или нулевые. Он позволяет аппроксимировать однородные системы уравнений $\mathbf{p}(\mathbf{M}+\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{0}$ системами $\mathbf{pM} = \mathbf{0}$ с бесконечно малой погрешностью.

Т е о р е м а . Пусть $\det(\mathbf{V})$ — бесконечно малый определитель порядка $n \times n$, $w_{ij}$ — $(i, j)$-компонент матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, вырожденная $n \times n$-матрица $\mathbf{D} = \mathbf{V}+\boldsymbol{\Theta}$ не содержит линейно независимых строк и столбцов, все компоненты невырожденной $n \times n$-матрицы $\boldsymbol{\Theta}$ бесконечно малые либо нулевые, $\mathbf{x}^* = (x^*_j)$ — нетривиальное решение уравнения $\mathbf{Dx} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^* = (p^*_i)$ — нетривиальное решение уравнения $\mathbf{pD} = \mathbf{0}$. Тогда имеет место $w_{ij} = c(x^*_i p^*_j + \xi_{ij})$, где $\xi_{ij} \to 0$, $c \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Выберем в матрице $\mathbf{D}$ базисный минор $\mathbf{M}_D$. Обозначим символом $\mathbf{M}_V$ минор матрицы $\mathbf{V}$, образованный из строк (столбцов) с индексами, соответствующими индексам строк (столбцов) матрицы $\mathbf{D}$, вошедших в $\mathbf{M}_D$. Матрицу $\boldsymbol{\Theta}$ выберем так, чтобы имело место $\mathbf{M}_V \neq 0$. Представим обе матрицы (при необходимости переставив строки и столбцы и соответствующим образом переопределив $\mathbf{W}$) в формах

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_D & \mathbf{D}_2 \\ \hline \mathbf{D}_3 & \mathbf{D}_4 \end{array}\right); \quad \mathbf{V} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_V & \mathbf{V}_2 \\ \hline \mathbf{V}_3 & \mathbf{V}_4 \end{array}\right).$$

Соответственно представим $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2)$, $\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_3)$, где компоненты вектора $\mathbf{x}_1$ (или $\mathbf{p}_1$) соотносятся со столбцами (или строками) любого из миноров $\mathbf{M}_D$ и $\mathbf{M}_V$.

Согласно формуле Крамера, при заданных $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{p}_3$ имеет место

$$x^*_j = (\mathbf{M}_\mathrm{D})_j \,/\, \mathbf{M}_\mathrm{D}; \quad p^*_i = (\mathbf{M}_\mathrm{D})_i \,/\, \mathbf{M}_\mathrm{D},$$

где $(\mathbf{M}_\mathrm{D})_j$ — минор, полученный из $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ заменой его столбца $j$ вектором $\mathbf{D}_2\mathbf{x}_2$, $(\mathbf{M}_\mathrm{D})_i$ — минор, полученный из $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ заменой его строки $i$ вектором-строкой $\mathbf{p}_3\mathbf{D}_3$.

Пусть $(\mathbf{M}_\mathrm{V})_j$ — минор, полученный из $\mathbf{M}_\mathrm{V}$ заменой его столбца $j$ вектором $\mathbf{V}_2\mathbf{x}_2$, $(\mathbf{M}_\mathrm{V})_i$ — минор, полученный из $\mathbf{M}_\mathrm{V}$ заменой его строки $i$ вектором-строкой $\mathbf{p}_3\mathbf{V}_3$. Поскольку различие между $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ и $\mathbf{M}_\mathrm{V}$ сколь угодно мало, $\mathbf{M}_\mathrm{D} \neq 0$, $\mathbf{M}_\mathrm{V} \neq 0$, имеет место

$$(\mathbf{M}_\mathrm{V})_j \,/\, \mathbf{M}_\mathrm{V} = x^*_j + \varepsilon_j,\ (\mathbf{M}_\mathrm{V})_i \,/\, \mathbf{M}_\mathrm{V} = p^*_i + \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i$, $\varepsilon_j$ — бесконечно малые. Введя вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, содержащий $\mathrm{rang}(\mathbf{D})$ компонентов $\varepsilon_j$, за которыми следует $(n - \mathrm{rang}(\mathbf{D}))$ нулей, получим $(\mathbf{M}_\mathrm{V} \mid \mathbf{V}_2)(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_x) = \mathbf{0}$. Поскольку строки матрицы $(\mathbf{V}_3 \mid \mathbf{V}_4)$ лишь на бесконечно малые отличаются от линейной комбинации строк $(\mathbf{M}_\mathrm{V} \mid \mathbf{V}_2)$, имеет место $(\mathbf{V}_3 \mid \mathbf{V}_4)(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_x) = \boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta}$ — вектор, состоящий из бесконечно малых (хотя бы одной) и нулей.

Пусть $\mathbf{w}_j$ — $j$-столбец матрицы $\mathbf{W}$. Тогда $\mathbf{Vw}_j = \mathbf{i}_j$, где $\mathbf{i}_j$ — $j$-столбец единичной матрицы. Выберем $j > \mathrm{rang}(\mathbf{D})$ и обозначим соответствующий компонент вектора $\boldsymbol{\eta}$ символом $\eta_j$. Выбрав соответствующим образом $\mathbf{x}_2$ (этот выбор зависит только от компонентов соответствующих столбцов $\boldsymbol{\Theta}$), всегда можно добиться, чтобы в $\boldsymbol{\eta}$ был единственный ненулевой компонент — именно $\eta_j$. Тогда, умножив $\boldsymbol{\eta}$ и $(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_x)$ на $1/\eta_j$, получим $\mathbf{V}(1/\eta_j\,(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_x)) = \mathbf{i}_j$, откуда $\mathbf{w}_j = 1/\eta_j\,(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_x)$. Выбирая при необходимости другие базисные миноры $\mathbf{M}_\mathrm{D}$, получим аналогичные выражения для всех столбцов матрицы $\mathbf{W}$. Подобным образом можно получить выражения для строк матрицы $\mathbf{W}$, имеющие вид $\mathbf{w}_i = 1/\eta_i\,(\mathbf{p}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_p)$. Отсюда

$$w_{ij} = (x^*_i + \varepsilon_{xi}) \,/\eta_j = (p^*_j + \varepsilon_{pj}) \,/\eta_i = c(x^*_i + \varepsilon_{xi})(p^*_j + \varepsilon_{pj}) = c(x^*_i p^*_j + \xi_{ij}),$$

где $\xi_{ij} \to 0$, $c \to \infty$. Теорема доказана.

К системам $\mathbf{pM} = \mathbf{0}$ можно свести условия Куна-Таккера в точке оптимума (или оптимума по Парето) любой экономико-математической модели с выпуклым (по крайней мере, в окрестности оптимума) и замкнутым множеством допустимых решений [3]. Тогда компоненты $\mathbf{M}^{-1}$ (а значит, и вектора $\mathbf{p}$, которому почти пропорциональны строки матрицы $\mathbf{M}^{-1}$) отражают прирост интенсивности производства, компенсирующий изъятие бесконечно малой единицы ограниченного блага в малой окрестности оптимума (с точностью до пренебрежимой погрешности). Это следует из уравнения $\mathbf{M}^{-1}d\mathbf{y} = d\mathbf{x}$, где $d\mathbf{y}$ — вектор дифференциалов свободных членов эффективных ограничений модели, $d\mathbf{x}$ — вектор дифференциалов интенсивности базисных процессов. Итак, ненулевые оптимальные цены почти пропорциональны приросту интенсивности любого ненулевого производства, компенсирующему единичное изъятие каждого из этих благ.

Проиллюстрируем вышесказанное числовым примером. Пусть имеется система «затраты-выпуск», отражающая технологии вида

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}9000 & -0{,}4000 & -0{,}3000 \\ -0{,}5000 & 0{,}8000 & -0{,}4000 \\ -0{,}2000 & -0{,}2000 & 0{,}9000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}-\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 124{,}476 \\ 93{,}706 \\ 81{,}818 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 50{,}000 \\ -20{,}000 \\ 30{,}500 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_0}.$$

Положим, что добавленная стоимость в расчёте на единицу интенсивности каждого процесса составляет соответственно 2,0000; 2,0000 и 5,0000 денежных единиц. Тогда из предыдущего выражения следует

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}9000 & -0{,}4000 & -0{,}3000 & -50{,}000 \\ -0{,}5000 & 0{,}8000 & -0{,}4000 & 20{,}000 \\ -0{,}2000 & -0{,}2000 & 0{,}9000 & -30{,}500 \\ -2{,}0000 & -2{,}0000 & -5{,}0000 & 845{,}455 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}+\Theta} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 124{,}476 \\ 93{,}706 \\ 81{,}818 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}},$$

где 845,455 — совокупная величина добавленной стоимости.

Из решения системы уравнений, двойственной по отношению к вышеприведённой, можно найти цены всех трёх продуктов: 12,7273; 12,7273; 15,4545. Соответствующая матрица $\mathbf{M}^{-1}$ приведена нормированной таким образом, чтобы верхний левый компонент был равен цене первого продукта:

$$\begin{pmatrix} 12{,}7273 & 12{,}7273 & 15{,}4545 & 1{,}0000 \\ 14{,}2807 & 14{,}2807 & 17{,}3409 & 1{,}1221 \\ 8{,}7594 & 8{,}7594 & 10{,}6364 & 0{,}6882 \\ 0{,}0973 & 0{,}0973 & 0{,}1182 & 0{,}0076 \end{pmatrix}.$$

Первая строка матрицы совпадает с ценами с точностью, по крайней мере, до четвёртого знака. Остальные строки пропорциональны первой с той же точностью; столбцы пропорциональны вектору $\mathbf{x}_1$.

Таким образом, в приведённом примере замещение бесконечно малой единицы первого блага потребует увеличения интенсивности *любого* процесса в той же степени, что и замещение бесконечно малой единицы второго блага, и в степени, составляющей 12,73/15,45 от уровня, требуемого для замещения бесконечно малой единицы третьего блага. Требуемая степень прироста интенсивности процессов пропорциональна ценам соответствующих благ.

Цены — компоненты вектора **p** — можно рассматривать не только в терминах интенсивности технологических процессов. Их можно рассмотреть как затраты времени функционирования экономической системы. Действительно, запишем соотношение единиц измерения двух компонентов соответствующей строки матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ в предположении, что **M** построена на основе данных о функционировании экономики в течение года (бп — интенсивность базисного процесса, кп — конечная продукция, индексы — номера благ):

$$\frac{(\text{бп}_0/\text{год})}{(\text{кп}_1/\text{год})} : \frac{(\text{бп}_0/\text{год})}{(\text{кп}_2/\text{год})} = \frac{(\text{кп}_2/\text{год})}{(\text{кп}_1/\text{год})} = \frac{\text{лет}/\text{кп}_1}{\text{лет}/\text{кп}_2}.$$

Таким образом, компоненты вектора **p** обозначают соотношение времени функционирования экономической системы, необходимого для выпуска одинаковых бесконечно малых количеств каждого блага. В приведённом числовом примере выпуск бесконечно малой единицы первого и второго благ займёт 12,73 единиц времени, третьего — 15,45 единиц, если выбрать в качестве единицы времени его промежуток, в течение которого создаётся бесконечно малая единица добавленной стоимости.

В терминах бесконечно малых определителей можно объяснить разницу между ценами и коэффициентами полных затрат, формально представленную разностью $\mathbf{B} - \mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v$, где **B** — матрица полных затрат, **x** — вектор интенсивностей технологических процессов, **p** — вектор цен, $v$ — совокупная стоимость конечного потребления, $\otimes$ — оператор тензорного произведения векторов. Для этого представим $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, где **I** — единичная матрица, **A** — матрица прямых затрат, в виде суммы двух вырожденных компонентов: $(\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{y}\otimes\mathbf{c}/v)$ и $\mathbf{y}\otimes\mathbf{c}/v$. Первый компонент является результатом редукции [1] матрицы вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{y} \\ \hline -\mathbf{c} & v \end{array}\right),$$

где **y** — вектор конечного продукта, **c** — вектор добавленной стоимости на единицу технологического процесса. Данная матрица является вырожденной, поэтому для редукции следует воспользоваться обыкновенным жордановым исключением правого столбца и нижней строки (для невырожденных матриц обыкновенные жордановы исключения приводят к тому же результату, что и процедура, предложенная в [1]). Суть операции редукции состоит в том, что исключаемое благо заменяется в межотраслевой модели совокупностью благ, из которых оно производится. В данном случае благо «добавленная стоимость» представляется в форме косвенных затрат первого порядка на производство добавленной стоимости, каковые суммируются с прямыми затратами на производство остальных благ.

Аналогичным образом матрица **B** может быть формально представлена суммой двух вырожденных компонентов $\mathbf{B} - \mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v$ и $\mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v$. При этом в силу вышеприведённой теоремы имеет место $(\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{y}\otimes\mathbf{c}/v - \Delta_2) = \varepsilon_1(\mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v + \Delta_1)^{-1}$, $\mathbf{B} - \mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v - \Delta_1 = \varepsilon_2(\mathbf{y}\otimes\mathbf{c}/v + \Delta_2)^{-1}$, где $\Delta_1$, $\Delta_2$ — квадратные матрицы бесконечно малых, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — бесконечно малые скаляры. Таким образом, отклонение коэффициентов полных затрат от цен $\mathbf{B} - \mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v$ объясняется (с бесконечно малой погрешностью) добавленной стоимостью в расчёте на единицу интенсивности процесса и величинами конечного потребления.

Ещё одно следствие полученных соотношений состоит в том, что цены (а также интенсивности процессов), представленные вырожденной матрицей $\mathbf{x}\otimes\mathbf{p}/v$, обусловлены двумя группами факторов. К первой относятся технологические, не зависящие от перераспределения. Они представлены невырожденной матрицей **B**. Вторую образуют перераспределительные факторы, не зависящие от технологий, представленные бесконечно малым определителем вида $\varepsilon_2(\mathbf{y}\otimes\mathbf{c}/v + \Delta_2)^{-1}$. Если перераспределение обусловлено объективно, то есть сведено к технологически необходимым затратам благ, вторая группа факторов не действует, а соответствующая матрица состоит из нулей.

Выводы.

1. Ненулевые оптимальные цены почти пропорциональны приросту интенсивности любого ненулевого производства, компенсирующему единичное изъятие каждого из этих благ.
2. Цены отражают соотношение времени функционирования экономической системы, необходимого для выпуска одинаковых малых количеств каждого блага при заданных технологиях и условиях перераспределения.
3. Отклонения коэффициентов полных затрат от цен зависят от величин добавленной стоимости в расчёте на единицу интенсивности процесса и от размеров конечного потребления по закону $\varepsilon_2(\mathbf{y}\otimes\mathbf{c}/v + \Delta_2)^{-1}$.
4. При заданных добавленной стоимости на единицу интенсивности технологического процесса и размере конечного потребления существует математическая форма цены, представляющая её как сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от технологических факторов (выражаемых технико-экономическими коэффициентами), а другое — только от перераспределительных.

### *Литература*

1. Леонтьев В. Альтернатива агрегированию в анализе «затраты-выпуск» и системе национальных счетов // Леонтьев В. Экономические эссе: Теории, исследования, факты и политика. М.: Изд-во политической литературы, 1990. — С.277-294.
2. Полтерович В.М. Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990. — 256 с.
3. Светлов Н.М. На пути к новой концепции стоимости. М.: Изд-во МСХА, 2002. — 108 с.